Teorem 2.6.3: F üzerinde V ve W birer vektör uzayı olsunlar. V'nin bir bazı $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ ve W'da verilen herhangi $\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ vektörleri için $A(\alpha_i)=\beta_i \;\; i=1,2,...,n$ olacak şekilde bir tek $A:V\rightarrow W$ lineer dönüşümü vardır.

İspat: Kabul edelim ki $A(\alpha_i)=\beta_i$ olacak şekilde bir $A:V\rightarrow W$ dönüşümü lineer olsun. $\forall\alpha\in V$ için germe aksiyomu gereğince

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i \quad , \quad \forall c_i\in F$$

olacak şekilde tek türlü yazılır.

$$A(\alpha)=A\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iA(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i$$

Bu ise $A(\alpha)\in W$ vektörünün $A(\alpha_i)$ yani β_i vektörlerinin lineer birleşimine eşittir. Yani,

$$A(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i$$

yazılışı tek türlüdür. A'nın lineerliği için, $c_1=c_2=...=c_n=0$ olarak $A(\alpha_i)=\beta_i$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$A(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}c_iA(\alpha_i)$$

olup A lineerdir.

Teorem 2.6.4: $A:V\rightarrow W$ dönüşümü sonlu boyutlu bir V vektör uzayından W'ya tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$rankA+boyÇekA=boyV$$

olur.

İspat: $boyV=n$, $boyÇekA=s$ olsun. A'nın çekirdeğinin bir bazı

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$$

ise, bu durumda baza tamamlama teoremi gereğince V'nin bir

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\alpha_{s+1},...,\alpha_n\}$$

bazı bulunabilir. Eğer $\{A(\alpha_{s+1}),...,A(\alpha_n)\}$ cümlesinin $A(V)$'nin bir bazı olduğunu gösterirsek

$$boyA(V)=n-s=boyV-boyÇekA$$

buradan da

$$rankA + boyÇekA = boyV$$

olduğu gösterilmiş olur.

Germe aksiyomu,

Herhangi bir $\forall \alpha \in V$ için

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \quad , \quad \forall c_i \in F$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i A(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{s} c_i \underbrace{A(\alpha_i)}_{\in çekA} + \sum_{i=s+1}^{n} c_i A(\alpha_i) \end{aligned}$$

$$A(\alpha) = \sum_{i=s+1}^{n} c_i A(\alpha_i)$$

dolayısıyla

$$A(\alpha) \in Sp\{A(\alpha_{s+1}), \ldots, A(\alpha_n)\}$$

germe aksiyomu sağlanır.

Lineer bağımsızlık

$$\sum_{i=s+1}^{n} c_i A(\alpha_i) = \vec{0} \Rightarrow A\left(\sum_{i=s+1}^{n} c_i \alpha_i\right) = \vec{0}$$

A lineer olduğundan,

$$\sum_{i=s+1}^{n} c_i \alpha_i = \vec{0}$$

$\{\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n\}$ lineer bağımsız olduğundan,

$$c_{s+1} = c_{s+2} = \ldots = c_n = 0$$

cümlesi $A(V)$ için bir bazdır. O halde $rankA + boyÇekA = boyV$ ’dir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

Soru 1) $L: IR^2 \to IR^3$, $L(x,y) = (4x-2y, 3y, x)$ olarak tanımlanan dönüşümün lineer olup olmadığını araştırınız. Görüntü uzayını, çekirdek uzayını ve bunların boyutlarını bulunuz.

2) $L: IR^4 \to IR^2$ dönüşümü, $L(x,y,z,t) = (x-y, z-t)$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün çekirdek uzayını, görüntü uzayını ve boyutlarını bulunuz.

ÖDEV SORULARI-11

Soru 1) $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, IR^4 uzayının bir elemanıdır. $x_1 = x_2$ olacak şekilde elemanların cümlesi M ve $x_2 = 0$ olacak şekilde elemanların cümlesi N olsun. M ve N nin IR^4 için birer altuzay olduklarını ispat ediniz, her birinin boyutunu bulunuz. $boy(M \cap N)$ ve $boy(M+N)$ değerlerini bulunuz ve $boy(M+N) = boyM + boyN - boy(M \cap N)$ eşitliğini gerçekleyiniz.

Soru 2) V bir reel iç çarpım uzayı ve boyV=4 olsun. V'de (1,0,0,0) ve (1,0,1,0) vektörlerinin gerdiği uzayın ortogonal komplemanının bir bazını bulunuz.

Soru 3) $L: IR^3 \to IR^2$ dönüşümü $L(x,y,z) = (x+y+z, x-y-3z)$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, L nin lineer bir dönüşüm olduğunu gösteriniz. $ÇekL$ ve $\operatorname{Im} L$ cümlelerini, bazlarını ve boyutlarını bulunuz.

Soru 4) Bir lineer dönüşümün 1-1 olması için gerek ve yeter şart çekirdek uzayının boyutunun 'sıfır' olmasıdır, ispat ediniz.

Soru 5) V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ bir lineer dönüşüm ise V'nin herhangi bir alt uzayı V_1 ise $A(V_1)$ cümlesi W'nin bir alt uzayıdır.

Soru 6) V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ bir lineer dönüşüm ise W'nin herhangi bir alt uzayı W_1 ise $A^{-1}(W_1) = \{\alpha \in V : A(\alpha) \in W_1\}$ cümlesi V'nin bir alt uzayıdır.

Soru 7) V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ bir lineer dönüşüm ise A lineer dönüşümü birebir ve V'de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ lineer bağımsız iseler $\{A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots, A(\alpha_k)\}$ cümlesi de W'de lineer bağımsızdır.

Soru 8) Homeomorfizm, lineer endomorfizm, lineer epimorfizm, lineer izomorfizm ve lineer otomorfizm kavramlarını tanımlayınız.

Soru 9) Schwartz eşitsizliğini ifade ve ispat ediniz.

Soru 10) V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. V'nin herhangi bir U alt uzayı için $V = U \oplus U^{\perp}$ ve $(U^{\perp})^{\perp} = U$ eşitlikleri vardır, ispat ediniz.

DERS NOTLARI

2.7. Ortogonal İzdüşüm

F cismi üzerinde tanımlanan n-boyutlu bir iç çarpım uzayı V olsun. V'nin bir altuzayı U olmak üzere

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

yazılabileceğini biliyoruz. Böylece $\forall \alpha \in V$ vektörü için $\alpha_1 \in U$ ve $\alpha_2 \in U^{\perp}$ olmak üzere

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

dir.

Teorem 2.7.1: F cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı $V = U \oplus U^{\perp}$ olsun. Her bir

$$\begin{aligned} P : V &\to U \\ \alpha &\to P(\alpha) = \alpha_1 \end{aligned}$$

ve $\alpha_1 \in U$, $\alpha_2 \in U^{\perp}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olmak üzere her bir

$$\begin{aligned} Q : V &\to U^{\perp} \\ \alpha &\to Q(\alpha) = \alpha_2 \end{aligned}$$

dönüşümü lineerdir.

İspat.

$\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a, b \in F$ için

$$P(a\alpha + b\beta) = P(a(\alpha_1 + \alpha_2) + b(\beta_1 + \beta_2)) = P((a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2))$$

dır. U ve $U^{\perp}$ uzayları V nin birer altuzayları olduklarından

$$\alpha_1, \beta_1 \in U \Rightarrow a\alpha_1 + b\beta_1 \in U$$

$$\alpha_2, \beta_2 \in U^{\perp} \Rightarrow a\alpha_2 + b\beta_2 \in U^{\perp}$$

dır. Böylece P dönüşümünün tanımından

$$P(a\alpha + b\beta) = a\alpha_1 + b\beta_1 = aP(\alpha) + bP(\beta)$$

ve aynı şekilde

$$Q(a\alpha + b\beta) = a\alpha_2 + b\beta_2 = aQ(\alpha) + bQ(\beta)$$

elde edilir. O halde P ve Q birer lineer dönüşümdür.

Teorem 2.7.1' deki P ve Q dönüşümleri cinsinden $\forall\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ vektörü $\alpha_1 = P(\alpha)$ ve $\alpha_2 = Q(\alpha)$ olduğundan

$$\alpha = P(\alpha) + Q(\alpha)\,,\ \forall\alpha \in V$$

olarak yazılabilir. Buradan, fonksiyonların toplamı ve eşitliği tanımından

$$\alpha = P(\alpha) + Q(\alpha)$$

ve

$$I(\alpha) = (P+Q)(\alpha)$$

için

$$P + Q = I$$

sonuca varılır.

Tanım 2.7.1: F cismi üzerinde n–boyutlu bir V vektör uzayı için $V = U \oplus U^{\perp}$ olsun.

$\forall\alpha \in V$, $\alpha_1 \in U$, $\alpha_2 \in U^{\perp}$,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

olmak üzere $P(\alpha) = \alpha_1$ olarak tanımlanan

$$P : V \to U$$

lineer dönüşümüne **V'nin U üzerine bir ortogonal izdüşümü** denir. Aynı şekilde $Q(\alpha) = \alpha_2$ ile tanımlanan

$$I - P = Q : V \to U^{\perp}$$

dönüşümüne de **V'nin $U^{\perp}$ üzerine bir ortogonal izdüşümü** denir.

Teorem 2.7.2: V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. $V = U \oplus U^{\perp}$ olmak üzere V'den U üzerine P ortogonal izdüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $P^2 = P$ dir (P nin **idempotent özelliği**)

ii. $\langle P(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, P(\beta)\rangle$, $\forall \alpha, \beta \in V$, (P nin **simetri özelliği**);

iii. $U = \{\alpha \in V \mid P(\alpha) = \alpha\} = \{P(\gamma) \mid \gamma \in V\}$.

İspat. $V = U \oplus U^{\perp}$ ve $P : V \to U$ olsun.

i. $\alpha \in U$ ise P nin tanımından $P(\alpha)=\alpha$ ve dolayısıyla

$$P^2(\alpha)=P(P(\alpha))=P(\alpha)=\alpha$$

olur ki bu da $\forall \alpha \in U$ için doğru olacağından

$$P^2=P$$

sonucunu verir.

$\alpha \in U^{\perp}$ ise $P(\alpha)=0$ olacağından

$$P^2(\alpha)=P(P(\alpha))$$

ve buradan

$$P^2(\alpha)=P(0)$$

olur. Diğer taraftan teorem 2.7.1 gereğince, P lineer olduğundan $P(0)=0$'dır. O halde $\forall \alpha \in U^{\perp}$ için

$$P^2(\alpha)=P(\alpha)=0$$

dır. Bu ise, ister $\alpha \in U$ ve ister $\alpha \in U^{\perp}$ olsun $P^2(\alpha)=P(\alpha)$ demektir. Bu da $P^2=P$ sonucunu verir. $\alpha \in V$ olsun. $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1 \in U$ ve $\alpha_2 \in U^{\perp}$'dir.

$$P(\alpha)=P(\alpha_1+\alpha_2) \qquad P^2(\alpha)=P(\alpha_1)$$

$$=P(\alpha_1)+P(\alpha_2) \qquad P^2(\alpha)=\alpha_1$$

$$=\alpha_1+0 \qquad P^2(\alpha)=P(\alpha)$$

$$=\alpha_1 \qquad P^2=P$$

ii. Bu ispatı birkaç adımda yapmak gerekir.

a) $\alpha,\beta \in U$ olsun. Bu halde $P(\alpha)=\alpha$ ve $P(\beta)=\beta$ olacağından

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle=\langle \alpha,P(\beta)\rangle$$

olur.

b) $\alpha \in U$ ve $\beta \in U^{\perp}$ olsun. Bu halde $P(\alpha)=\alpha$ ve $\langle \alpha,\beta\rangle=0$ olacağından $\forall \alpha \in U$ için

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle=0$$

olur. Diğer taraftan $P(\beta)=0$ olduğundan

$$0=\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle P(\alpha),0\rangle=\langle \alpha,P(\beta)\rangle$$

yazılabilir.

c) $\alpha\in U^{\perp}$ ve $\beta\in U$ olsun. Bu halde $\langle \alpha,\beta\rangle=0$ ve $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=\beta$ olur. Böylece

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle 0,\beta\rangle=0$$

$$\langle \alpha,P(\beta)\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle=0$$

olur ki bu da

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle \alpha,P(\beta)\rangle$$

demektir.

d) $\alpha,\beta\in U^{\perp}$ olsun. Bu halde

$$P(\alpha)=P(\beta)=0$$

olacağından

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle 0,\beta\rangle=0$$

$$\langle \alpha,P(\beta)\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle=0$$

olur ki bu da

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle \alpha,P(\beta)\rangle$$

olması demektir.

e) $\alpha,\beta\in V$ olsun. O zaman $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ ve $\beta=\beta_1+\beta_2$, $\alpha_1,\beta_1\in U$ ve $\alpha_2,\beta_2\in U^{\perp}$ olur.

$$\begin{aligned}\langle P(\alpha),\beta\rangle&=\langle \alpha_1,\beta\rangle\\&=\langle \alpha_1,\beta_1+\beta_2\rangle\\&=\langle \alpha_1,\beta_1\rangle+\langle \alpha_1,\beta_2\rangle\\&=\langle \alpha_1,\beta_1\rangle\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\langle \alpha,P(\beta)\rangle&=\langle \alpha,\beta_1\rangle\\&=\langle \alpha_1+\alpha_2,\beta_1\rangle\\&=\langle \alpha_1,\beta_1\rangle+\langle \alpha_2,\beta_2\rangle\\&=\langle \alpha_1,\beta_1\rangle\end{aligned}$$

O halde yine

$$\langle P(\alpha),\beta\rangle=\langle \alpha,P(\beta)\rangle=\langle \alpha_1,\beta_1\rangle$$

olur.

iii. P'nin tanımından

$$U = \{\alpha \in V \mid P(\alpha) = \alpha\} = \{P(\gamma) \mid \gamma \in V\}$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.7.3: V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı ve U da V nin

$$U = \{\alpha \in V \mid P(\alpha) = \alpha\}$$

olarak tanımlanan bir altuzayı olmak üzere bir

$$P : V \to U$$

dönüşümü

a) Lineer;
b) $P^2 = P$;
c) $\langle P(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, P(\beta)\rangle, \forall \alpha, \beta \in V$,

koşullarını sağlıyorsa V'nin U üzerinde bir ortogonal izdüşümüdür.

İspat: Bir $U^{\perp}$ in varlığı ve $V = U \oplus U^{\perp}$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall \alpha \in V$ için

$$\alpha = \mathrm{I}(\alpha)$$

$$\alpha = P(\alpha) + \mathrm{I}(\alpha) - P(\alpha)$$

$$\alpha = P(\alpha) + (\mathrm{I} - P)(\alpha)$$

yazılabilir. Burada $P(\alpha) \in U$ ve $(\mathrm{I} - P)(\alpha) \notin U$ olduğunu göstermeliyiz.

$$P^2 = P$$

olduğundan $\forall \alpha \in V$ için

$$P^2(\alpha) = P(\alpha)$$

veya

$$P(P(\alpha)) = P(\alpha)$$

yazabiliriz. Halbuki bu son eşitlik $P(\alpha)$ nın P altında resminin kendine eşit olduğunu ifade etmektedir. O halde U nun tanımı gereğince $\forall \alpha \in V$ için $P(\alpha) \in U$ dır. O halde

$$P : V \to U$$

dır. Şimdi

$$(\mathrm{I}-P)(\alpha)\notin U \text{ ve } (\mathrm{I}-P)(\alpha)\perp U$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall\beta\in U$ ya karşılık

$$\langle\beta,(\mathrm{I}-P)(\alpha)\rangle=0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle\beta,(\mathrm{I}-P)(\alpha)\rangle=\langle\beta,\alpha-P(\alpha)\rangle$$

$$=\langle\beta,\alpha\rangle-\langle\beta,P(\alpha)\rangle$$

dır. Diğer tarafından (c)' den

$$\langle\beta,P(\alpha)\rangle=\langle P(\beta),\alpha\rangle$$

dır ve ayrıca $\beta\in U\Rightarrow P(\beta)=\beta$ olduğundan

$$\langle\beta,(\mathrm{I}-P(\alpha)\rangle=\langle\beta,\alpha-P(\alpha)\rangle$$

$$=\langle\beta,\alpha\rangle-\langle\beta,\alpha\rangle$$

$$=0$$

olur. O halde $[\alpha-P(\alpha)]\in U^{\perp}$ olur.

Diğer taraftan $\alpha\in U\cap U^{\perp}\Rightarrow\langle\alpha,\alpha\rangle=0$ ve iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\alpha=0$ olur. O halde $V=U\oplus U^{\perp}$ olmak üzere $U^{\perp}$ altuzayı vardır. Öyleyse $\forall\in V$ için $x\in U$ ve $y\in U^{\perp}$ olmak üzere

$$\alpha=x+y$$

yazabiliriz. $P:V\to U$ lineer olduğundan

$$P(\alpha)=P(x)+P(y)$$

$$P(\alpha)=x+P(y)$$

ve $x,P(\alpha)\in U\Rightarrow[P(\alpha)-x]\in U \quad P(y)=P(\alpha)-x$

olduğundan $P(y)\in U$ ve dolayısıyla U nun tanımından $y\in U$ olur. O halde $y\in U\cap U^{\perp}$ olur ki bu da y=**O** olmasını gerektirir. P lineer olduğundan $P(y)=P(O)=O$ olacağından $P(\alpha)=x$ sonucuna varılır. O halde P dönüşümü V den U ya bir ortogonal izdüşümdür.

DEĞERLENDİRME SORULARI

Soru 1) $A^2 = A$ olacak biçimde bir n-boyutlu V vektör uzayının lineer dönüşümlerinden biri A olsun.

$$U = \{\alpha \in V \mid A(\alpha) = \alpha\}$$

$$W = \{\alpha \in V \mid A(\alpha) = 0\}$$

konumunu yaparak

$$V = U \oplus W$$

olduğunu ve V nin W boyunca U üzerine izdüşümünün A olduğunu gösteriniz.

Soru 2) S ve T bir V iç çarpım uzayına göre birbirinin ortogonal komplemanı olsunlar. Bir $z \in V$ vektörü için öyle bir $x \in S$ ve bir $y \in T$ vektörü vardır ki

$$z = x + y$$

dir. Bu gösterimin tek olduğunu gösteriniz.

ÖDEV SORULARI-12

Soru 1) V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı ve U da V nin

$$U = \{\alpha \in V \mid P(\alpha) = \alpha\}$$

olarak tanımlanan bir altuzayı olmak üzere bir

$$P : V \to U$$

dönüşümü için $P^2 = P$ olduğunu gösteriniz.

Soru 2) V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. $V = U \oplus U^{\perp}$ olmak üzere V'den U üzerine P ortogonal izdüşümü olsun. $\alpha, \beta \in U^{\perp}$ için $\langle P(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, P(\beta) \rangle$ olduğunu gösteriniz.

Soru 3) V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. $V = U \oplus U^{\perp}$ olmak üzere V'den U üzerine P ortogonal izdüşümü olsun. $\alpha \in U^{\perp}$ ve $\beta \in U$ için $\langle P(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, P(\beta) \rangle$ olduğunu gösteriniz.

Soru 4) V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. $V = U \oplus U^{\perp}$ olmak üzere V'den U üzerine P ortogonal izdüşümü olsun. $\alpha, \beta \in U$ için $\langle P(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, P(\beta) \rangle$ olduğunu gösteriniz.

Soru 5) F cismi üzerinde n–boyutlu bir V vektör uzayı için $V = U \oplus U^{\perp}$ olsun. V'nin U üzerine bir ortogonal izdüşümünü tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

Soru 6) F cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı $V = U \oplus U^{\perp}$ olsun. Her bir

$$\begin{aligned} P &: V \to U \\ &\alpha \to P(\alpha) = \alpha_1 \end{aligned}$$

ve $\alpha_1 \in U$, $\alpha_2 \in U^{\perp}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olmak üzere her bir

$$\begin{aligned} Q &: V \to U^{\perp} \\ &\alpha \to Q(\alpha) = \alpha_2 \end{aligned}$$

dönüşümleri için $P + Q = I$ olduğunu gösteriniz.

Soru 7) $A : V \to W$ dönüşümü sonlu boyutlu bir V vektör uzayından W'ya tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda, ispat ediniz ki

$$rankA + boyÇekA = boyV$$

eşitliği vardır.

Soru 8) F üzerinde bir V vektör uzayının sonlu boyutlu iki alt vektör uzayı W_1 ve W_2 olsun. Bu durumda $W_1 + W_2$ ve $W_1 \cap W_2$ 'de sonlu boyutludurlar ve

$$boy(W_1 + W_2) = boy(W_1) + boy(W_2) - boy(W_1 \cap W_2)$$

eşitliği vardır, ispat ediniz.

Soru 9) Bessel Eşitsizliğini ifade ve ispat ediniz.

Soru 10) IR^2 'de $X = (1,-1)$ ve $Y = (-1,-1)$ vektörleri lineer bağımsızdır, gösteriniz.

Soru 11) Aşağıdaki uzayların boyutlarını bulunuz?

a) $Sp\{(0,0,0),(1,1,1)\}$

b) $Sp\{(1,-2,3),(3,-6,9)\}$

c) $Sp\{(1,-2,-3),(3,2,1)\}$

d) $Sp\{(0,1,-2),(1,-1,1),(1,2,1)\}$

e) $Sp\{(0,2,-4),(1,-2,-1),(1,-1,3)\}$

Soru 12) $G = \{1,-1,i,-i\}$ olmak üzere $(G,.)$ bir grup mudur? ($i^2 = -1$)

Soru 13) $W_1 = Sp\{(1,2,-1),(3,0,1)\}$ ve $W_2 = Sp\{(-1,1,0),(2,1,3)\}$, Buna göre $IR^3 = W_1 \oplus W_2$ olarak yazılabilirmi?

Soru 14) $W_1 = Sp\{(1,2,-1),(3,0,1)\}$ ve $W_2 = Sp\{(-1,1,0),(2,1,3)\}$, Buna göre $W_1 \cap W_2$ uzayının bir bazını bulunuz.

DERS NOTLARI