A nxn regüler matris ve birbirinden farklı karakteristik değerleri λ_i, i=1,…,n ve bunlara karşılık gelen karakteristik vektörler x_i , i=1,…,n olsun. Sütunları karakteristik vektörler olan matris P olmak üzere

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PB \end{aligned}$$

eşitliği elde edilebilir. AP=PB eşitliğinin her iki tarafını A matrisin inversi ile çarpılırsa

$$P^{-1}AP = B$$

elde edilir ki, buradaki B matrisi A matrisinin köşegenleştirilmiş halidir.

A ve B matrisleri benzer matrisler ise, lineer bağımsız satır vektörlerinin (lineer bağımsız sütun vektörlerinin) sayıları da aynıdır ve dolayısıyla benzer matrislerin rankları birbirine eşittir diyebiliriz.

Teorem 6.2.3: A ve B matrisleri benzer matrisler ise aynı karakteristik değerlere sahiptirler.

İspat: A ve B matrisleri benzer matrisler ise, $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde regüler bir P matrisi vardır. B matrisinin matris polinomu $P_B(\lambda)$ ise

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= |\lambda I_n - B| \\ &= |\lambda I_n - P^{-1}AP| \\ &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I_n - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I_n - A||P| \\ &= |P|^{-1} P_A(\lambda)|P| \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

eşitliğinden A ve B matrislerinin matris polinomları aynıdır ve dolayısıyla karakteristik denklemleri ve bu denklemlerin kökleri de aynıdır.

Diğer taraftan, A ve B benzer matrisleri için, determinant özelliklerinden;

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |P|^{-1}|P||A| = |A|$$

dolayısıyla,

$$|A| = |B| = \lambda_1.\lambda_2. \dots .\lambda_n$$

eşitliği, elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Sonuç 6.2.1: A ve B benzer matrisler ise determinantları eşittir.

Yukarıdaki sonuç kullanılarak, bir matrisin köşegenleştirilebilme şartını veren şu önemli sonuç verilebilir.

Sonuç 6.2.2: A nxn-matris olmak üzere A matrisinin köşegenleştirilebilmesi için A matrisinin regüler olması ve dolayısıyla tüm karakteristik değerlerinin sıfırdan farklı olmasıdır.

Teorem (Köşegenleşme teoremi) 6.2.4: A nxn-matris olsun. Bu durumda A matrisi köşegenleştirilebilir matristir ancak ve ancak A matrisi n-tane lineer bağımsız karakteristik vektöre sahiptir.

İspat: Kabul edelimki A matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Dolayısıyla A matrisinin tüm karakteristik değerleri sıfırdan farklıdır. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ karakteristik değerler ve $AX_i = \lambda_i X_i$ olacak şekilde karakteristik vektörler $X_1, X_2, ..., X_n$ olsun. $X_1, X_2, ..., X_n$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $c_1, c_2, ..., c_n \in K$ için

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n = 0 \qquad (*)$$

olsun. * eşitliğini sırasıyla λ_i ve λ_j değerleriyle çarpalım.

$$\lambda_i c_1 X_1 + \lambda_i c_2 X_2 + ... + \lambda_i c_n X_n = 0$$
$$\lambda_j c_1 X_1 + \lambda_j c_2 X_2 + ... + \lambda_j c_n X_n = 0$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_i - \lambda_j)c_1 X_1 + (\lambda_i - \lambda_j)c_2 X_2 + ... + (\lambda_i - \lambda_j)c_n X_n = 0$$

λ_i ve λ_j değerleri birbirinden farklı ve her bir X_i sıfırdan farklı olacağından, * eşitliğini sağlayabilen $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ dışında hiçbir lineer kombinasyon yoktur. Dolayısıyla $X_1, X_2, ..., X_n$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Tersine kabul edelim ki A matrisi n-tane lineer bağımsız karakteristik vektöre sahip olsun. Bu durumda karakteristik vektörler $X_1, X_2, ..., X_n$ ise her biri sıfırdan farklıdır ve $AX_i = \lambda_i X_i$ eşitliğinden $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ karakteristik değerleri de sıfırdan ve teorem 6.1.1 den dolayı birbirinden de farklıdır. Sonuç 6.2.1 den A matrisi regülerdir ve köşegenleştirilebilirdir.

Tanım 6.2.2: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ bir A nxn-matrisinin karakteristik değerleri olsun. Eğer her $\lambda_i > 0$ ve A simetrik ise **A matrisine pozitif tanımlı**, her $\lambda_i < 0$ ise **A simetrik matrisine negatif tanımlıdır** denir.

Eğer $B = P^{-1}AP$ eşitliğinde, A matrisi simetrik matris ise, ilk göze çarpan özelliği,

$$P_{A^T}(\lambda) = \left|\lambda I_n - A^T\right| = \left|\lambda I_n - A\right| = P_A(\lambda)$$

eşitliğinden görülür. Dolayısıyla karakteristik denklemleri ve bu denklemlerin kökleri de aynıdır. Diğer taraftan, $P^{-1}AP = B$ eşitliği kullanılarak $A = PBP^{-1}$ yazılabilir. Bu eşitlikte A matrisinin simetrik olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} A^T &= A \\ \left(PBP^{-1}\right)^T &= PBP^{-1} \\ \left(P^{-1}\right)^T B^T P^T &= PBP^{-1} \\ \left(P^{-1}\right)^T BP^T &= PBP^{-1} \end{aligned}$$

eşitliğinden $P^T = P^{-1}$ olacağı görülür. Bu durumda, P matrisi ortogonal matristir. Yani sütunlarını oluşturan x_i karakteristik vektörleri ortonormal vektör cümlesi oluşturur. Bu özellik, matris teorisinde "spectral teorem", mekanikte ise "asli eksen teoremi" olarak bilinir.

Sonuç 6.2.3: A simetrik matris ise, A matrisinin tüm karakteristik değerleri reeldir ve birbirinden farklı karakteristik değerlere karşılık gelen karakteristik vektörleri diktir.

İspat: A simetrik matris ve λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektörü X olsun. $\langle , \rangle$ Hermit iççarpımı olmak üzere,

$$\langle AX, X \rangle = \langle X, A^T X \rangle$$

eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \langle X, AX \rangle &= \langle X, \lambda X \rangle = \overline{\lambda} \langle X, X \rangle \\ \langle AX, X \rangle &= \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \langle X, X \rangle \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\lambda \langle X, X \rangle = \overline{\lambda} \langle X, X \rangle \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) \langle X, X \rangle = 0$ ve buradan $\lambda = \overline{\lambda}$ olur ki, bu ise λ'nın bir reel sayı olması demektir.

Kabul edelimki A simetrik matrisinin farklı karakteristik değerleri $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve bunlara karşılık gelen karakteristik vektörler X_1 ve X_2 olsun. Bu durumda,

$$\lambda_1 \langle X_1, X_2 \rangle = \langle \lambda_1 X_1, X_2 \rangle = \langle AX_1, X_2 \rangle = \langle X_1, A^T X_2 \rangle = \langle X_1, AX_2 \rangle = \langle X_1, \lambda_2 X_2 \rangle = \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle X_1, X_2 \rangle = \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle &\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle X_1, X_2 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle X_1, X_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise X_1 ve X_2 vektörlerinin dik olması demektir.

Diğer taraftan, n-boyutlu bir V vektör uzayı ve $A : V \longrightarrow V$ tanımlı lineer dönüşüm düşünüldüğünde, lineer dönüşümün V vektör uzayının φ ve ψ gibi farklı iki bazı dikkate alınırsa, $P^{-1}AP = B$ eşitliği, lineer dönüşümün matrisinin V'nin farklı iki bazına göre ifadeleri arasındaki bağıntıyı anımsatır. $B = A_\psi$ ve $A = A_\varphi$ alınırsa, bir a lineer dönüşümünün V'nin φ ve ψ gibi farklı iki bazına göre ifadeleri arasındaki

$$A_\psi = P^{-1} A_\varphi P$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitlikten yararlanarak, $P_{A_\psi}(\lambda) = P_{A_\varphi}(\lambda)$ eşitliği kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 6.2.5: $V \longrightarrow V$ tanımlı lineer dönüşüm karakteristik polinomu (bu lineer dönüşüme karşılık gelen matrisin karakteristik polinomu) V vektör uzayındaki baz seçilişinden bağımsızdır.

Benzer matrislerin kullanışlı bir diğer özelliğini aşağıdaki sonuş ile verebiliriz.

Sonuç 6.2.4: A ve B benzer matrisler ise $A^k = PB^k P^{-1}$ eşitliği vardır.

İspat: $P^{-1}AP = B$ eşitliği kullanılarak $A = PBP^{-1}$ yazılabilir. Buradan

$$A^k = \left(PBP^{-1}\right)^k = \underbrace{\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)...\left(PBP^{-1}\right)}_{k-\tan e} = PB\left(P^{-1}P\right)BP^{-1}...PB\left(P^{-1}P\right)BP^{-1} = PB^k P^{-1}$$

ve

$$B^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & (\lambda_n)^k \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A^k = P\begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & (\lambda_n)^k \end{bmatrix}P^{-1}$$

elde edilir.

Eğer $k \to \infty$ olduğu düşünülürse

$$A^k = P\begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & (\lambda_n)^k \end{bmatrix}P^{-1}$$

eşitliğinden $A^k \to 0$ olmasının tek şartının her i değeri için $|\lambda_i| < 1$ olacağı açıkça görülür.

Örnek 6.2.2:

$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ ve $\lambda_3=-2$ olup

karakteristik vektörler $X_1=(1,0,-1)$, $X_2=(1,-1,-1)$ ve $X_3=(1,-1,4)$ olup P matrisi

$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$ ve $P^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ olup $B=P^{-1}AP$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buradan $PBP^{-1}=A$ eşitliği

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3 & 0 & 0\\ 0 & 3^3 & 0\\ 0 & 0 & (-2)^3\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\right)$$

hesaplanırsa,

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & -19 & -7\\ 7 & 27 & 7\\ -9 & 19 & -1\end{bmatrix}$$

bulunur.

DEĞERLENDİRME SORULARI

SORU 1. Benzer matrisler aynı karakteristik değerlere sahiptirler, gösteriniz.

SORU 2. A bir simetrik matrisi ise A nın farklı karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörleri diktir, gösteriniz.

SORU 3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiren P ortogonal matrisini bulunuz.

SORU 4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiren P matrisini bulunuz. A^3 matrisini hesaplayınız.

ÖDEV SORULARI-XI

SORU 1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ karakteristik polinomunu, karakteristik değerlerini, bu değerlere karşılık gelen karakteristik vektörleri ve karakteristik uzaylarını bulunuz.

SORU 2. IR^3 vektör uzayının

$$\psi_1 = \{f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,0,1), f_3 = (1,-1,1)\} \text{ ve } \psi_2 = \{h_1 = (1,1,0), h_2 = (0,1,1), h_3 = (0,0,1)\},$$

IR^2 vektör uzayının

$$\varphi_1 = \{g_1 = (0,1), g_2 = (1,0)\} \text{ ve } \varphi_2 = \{g_1 = (1,1), g_2 = (-1,1)\}$$

bazları veriliyor.

a) $\varphi_1 = P\varphi_2$ ve $\psi_1 = Q\psi_2$ olacak şekilde P ve Q matrislerini bulunuz.

b) $\varphi_2 = P'\varphi_1$ ve $\psi_2 = Q\psi_1$ olacak şekilde P' ve Q' matrislerini bulunuz ve bunların sırasıyla P ve Q matrislerinin tersleri olacağını gösteriniz.

SORU 3. Eğer A singüler değilse, A^T de singüler değildir. Ayrıca $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ olduğunu gösteriniz.

SORU 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin eşelon matrisini bulunuz. Çarpanlara ayırınız.

satırrankA, sütunrankA ve rankA değerlerini bulunuz.

DERS NOTLARI